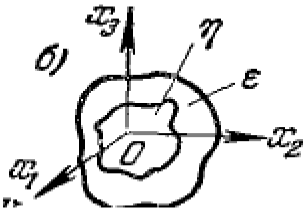
Билет №4

1) Устойчивость и особые точки НЛС. Аттракторы и репеллеры.



Формулировка понятия устойчивости по Ляпунову. Невозмущенное движение (установившийся процесс) называется устойчивым, если при заданной сколь угодно малой области ε (рис. 16.7, *б*) можно найти такую область η, что при начальных условиях, расположенных внутри этой области, возмущенное движение (переходный процесс) будет таким, что изображающая точка не выйдет из области ε при любом сколь угодно большом значении времени t.

(1, стр. 481)

Определение 3.1. Точка $x = x^* \in \mathcal{X}$ называется *равновесным состоянием* (*положением равновесия*) системы (3.1), если для всех $t \geq 0$ выполняется

$$x(t, x^*) = x^*.$$

Как следует из определения, необходимым и достаточным условием равновесия системы в точке x^* является выполнение равенства

$$f(x^*, t) = 0$$

для всех $t \geq 0$.

(2, стр. 62)

Особая точка (точка равновесного состояния) x(t) устойчива, если

$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \to 0\ \exists\ \delta > 0$: при $\|x_0 - y_0\| < \delta, \forall t > 0$

$\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon$ – простая устойчивость

$\lim \|x(t) - y(t)\| = 0$ – асимптотическая устойчивость

Устойчивая точка, притягивающая фазовые траектории, называется **аттрактором.**

Пусть X_e- притягивающая точка равновесия. S – траектория

$\forall t_0 (t > 0) \in R_+\ \exists\ \eta\ (t_0)$: $\|x_0\| < \eta\ (t_0) \Longrightarrow S(t_0 + t, t_0, x_0) \longrightarrow X_e (t \longrightarrow \infty)$ – аттрактор

Неустойчивая точка, от которой отталкиваются фазовые траектории, называется **репеллером**.

$\forall t_0 (t < 0) \in R_+\ \exists\ \eta\ (t_0)$: $\|x_0\| < \eta\ (t_0) \Longrightarrow S(t_0 + t, t_0, x_0) \longrightarrow X_e (t \longrightarrow \infty)$ – репеллер (источник 5)

Точки, устойчивые по одним координатам и неустойчивые по другим, называются седловыми точками.

Якобиан в устойчивой точке >0.

Надо дать 3 определения устойчивости по Ляпунову, Пуассону и Лагранжу (взять из Лекций).

Особые точки могут порождать вокруг себя либо притягивающее, либо отталкивающее многообразие. В первом случае они называются аттракторами, во втором репеллерами. Притягивающее многообразие – множество фазовых траекторий, которые в эту точку попадают. Соответственно отталкивающее – это множество точек, которые от этой точки убегают.

<u>2) z-преобразование. Переход к z-преобразованию импульсного сигнала. Обратное z-преобразование.</u>

Z-преобразованием (преобразованием Лорана) называют свёртывание исходного сигнала, заданного последовательностью вещественных чисел во временно́й области, в аналитическую функцию комплексной частоты.

Дискретная передаточная функция:

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)\,\delta(t - kT_0) \quad (4.1)$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)\,g(t - kT_0) \quad (4.2)$$

$t = nT_0$

$$y(nT_0) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)\,g((n-k)T_0) = \sum_{j=0}^{\infty} u((n-j)T_0)\,g(jT_0) \quad (4.3$$

$$y^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT_0)\,e^{-nT_0 s} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)\,g((n-k)T_0)\,e^{-nT_0 s} \quad (4.4)$$

$q = n - k$

$$y^*(s) = \sum_{q=k}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)\,g(qT_0)\,e^{-qT_0 s}\,e^{-kT_0 s} = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT_0)\,e^{-qT_0 s}\sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)\,e^{-kT_0 s}$$

$$y^*(s) = G^*(s)\,u^*(s) \quad (4.5)$$

дискр. передат. функция:

$$G^*(s) = \frac{y^*(s)}{u^*(s)} = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT_0)\,e^{-qT_0 s} \quad (4.6)$$

$z = e^{T_0 s} \Rightarrow$

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT_0)\,z^{-q} = Z\{g(q)\} \quad (4.7)$$

Объяснение того, что выше: Переход к z-преобразованию дискретного сигнала. В пространстве Лапласа изображение выходной величины:

$$y^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT_0) e^{-nT_0 s} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)\, g((n-k)T_0)\, e^{-nT_0 s} \quad (4.4)$$

Далее вводим дискретную передаточную функцию, как отношение выходной величины к входной:

дискр. передат. функция:

$$G^*(s) = \frac{y^*(s)}{u^*(s)} = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT_0)\, e^{-qT_0 s} \quad (4.6)$$

Эта формула практически повторяет преобразование Лапласа. Делая следующую замену:

$$z = e^{T_0 s}$$

Получаем передаточную функцию в следующем виде:

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT_0)\, z^{-q} = Z\{g(q)\} \quad (4.7)$$

Обратное Z-преобразование [править | править вики-текст]

Обратное Z-преобразование определяется, например, так:

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1}\, dz,$$

где C — контур, охватывающий область сходимости $X(z)$. Контур должен содержать все вычеты $X(z)$.